3/10 (3)

Καρτεσιανός μ.χ

$(E_1,\rho_1),(E_2,\rho_2),\dots,(E_m,\rho_m)$, $E = E_1\times E_2\times \dots \times E_n = \bigtimes_{i=1}^{n} E_i$

$E \ni x=(x_1,\dots,x_m)$ $\quad \rho(x,y)=\sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1)+\dots+\rho_m^2(x_m,y_m)} \in \mathbb{R}^+$

$E \ni y=(y_1,\dots,y_m)$ $\quad$ με $\rho: E\times E\to \mathbb{R}$

i) $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow \rho_1^2(x_1,y_1)+\dots+\rho_m^2(x_m,y_m)=0 \Leftrightarrow \rho_1(x_1,y_1)=\dots=\rho_m(x_m,y_m)=0$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} x_1=y_1 \\ \cdots \\ x_m=y_m \end{cases}\right\} \Rightarrow x=y$$

ii) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ ... Προφανής

iii) ν.δ.ο. $\rho(x,y)\le \rho(x,z)+\rho(z,y) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1)+\dots+\rho_m^2(x_m,y_m)} \le \sqrt{\rho_1^2(x_1,z_1)+\dots+\rho_m^2(x_m,z_m)}+\sqrt{\rho_1^2(z_1,y_1)+\dots+\rho_m^2(z_m,y_m)}$$

$z=(z_1,\dots,z_m)$

$\rho_i(x_i,y_i)=a_i$, $\rho_i(x_i,z_i)=\beta_i$, $\rho_i(z_i,y_i)=c_i$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\beta_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{m} c_i^2} \qquad \boxed{\sum_{i=1}^{m}\beta_i c_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\beta_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{m} c_i^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m}\beta_i^2+\sum_{i=1}^{m} c_i^2+2\sum_{i=1}^{m}\beta_i c_i \le \sum_{i=1}^{m}\beta_i^2+\sum_{i=1}^{m} c_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\beta_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{m} c_i^2} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \overset{(*)}{\le} \sum_{i=1}^{m}(\beta_i+c_i)^2 \le \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\beta_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{m} c_i^2}\right)^2$$

$$\boxed{(*)\ \rho_i(x_i,y_i)\le \rho_i(x_i,z_i)+\rho_i(z_i,y_i) \Rightarrow a_i \le \beta_i + c_i}$$

άρα ο (E,ρ) είναι ο καρτεσιανός μ.χ των μ.χ. (E_i,ρ_i)

με $i=1,2,\dots,m$

$$\underbrace{(\mathbb{R},|\cdot|)\ \dots\ (\mathbb{R},|\cdot|)}_{n \text{ φορές}}$$

$E=\mathbb{R}^n$ με $\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$

$\mathbb{R}^n \ni x=(x_1,\dots,x_n)$

$\mathbb{R}^n \ni y=(y_1,\dots,y_n)$

(E,ρ) μ.χ.

$$\tau(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \quad \text{με } x,y \text{ εν } E.$$

i) $\tau(x,y)=0 \Leftrightarrow \rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

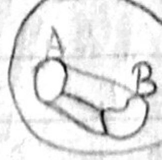
ii) $\tau(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}=\dfrac{\rho(y,x)}{1+\rho(y,x)}=\tau(y,x)$

iii) ν.δ.ο. $\tau(x,y)\leq \tau(x,z)+\tau(z,y)$.

$$\tau(x,z)+\tau(z,y)=\frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)}+\frac{\rho(z,y)}{1+\rho(z,y)}\geq$$

$$\geq \frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)}+\frac{\rho(z,y)}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)}=\frac{\rho(x,z)+\rho(z,y)}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{\rho(x,z)+\rho(z,y)}}\geq\frac{1}{1+\frac{1}{\rho(x,y)}}=\frac{\rho(x,y)}{\rho(x,y)+1}=\tau(x,y)$$



(E,ρ) μ.χ. , $\emptyset\neq A\subseteq E$, $\emptyset\neq B\subseteq E$

$$\rho(A,B)=\inf\{\rho(x,y) : (x,y)\in A\times B\}=\inf_{(x,y)\in A\times B}\rho(x,y)$$

i) $\rho(A,B)\geq 0$

ii) $\rho(A,B)=\rho(B,A)$

iii) $A\cap B\neq\emptyset \Rightarrow \rho(A,B)=0$

Απόδειξη του (iii)

$A\cap B\neq\emptyset \Rightarrow (\exists x_0) : x_0\in A \wedge x_0\in B$ τότε $\rho(x_0,x_0)\in\{\rho(x,y) : x\in A\wedge y\in B\}\Rightarrow$
$0\in\{\rho(x,y) : x\in A\wedge y\in B\}\Rightarrow$
$\inf\{\rho(x,y) : x\in A\wedge y\in B\}=0 \Rightarrow \rho(A,B)=0$

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Έστω $A=\{\frac{1}{\nu} : \nu\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{R}$ $(\mathbb{R},|\ |)$
$\{0\}\subseteq\mathbb{R}$ με $\rho(\{0\},A)=\inf_{y\in A}\rho(0,y)=\inf|0-\frac{1}{\nu}|=\inf_{\nu\in\mathbb{N}}\frac{1}{\nu}=0$

ΑΣΚΗΣΗ: ν.δ.ο. $\rho((0,1),(1,2])=0$ στον ευκλείδιο μετρικό χώρο

$\emptyset\neq A\subseteq E$ $x\in E$ (x στοιχείο, A σύνολο)
$\rho(x,A)=\rho(\{x\},A)=\inf_{y\in A}\rho(x,y)$

(5)

Ορισμός

(E, ρ) μ.χ.

$A \subseteq E$

διάμετρος: $\delta(A) = \sup\{\rho(x,y) : (x,y) \in A \times A = A^2\} = \sup_{(x,y)\in A^2} \rho(x,y)$

A φραγμένο $\iff \delta(A) < +\infty$

$(\mathbb{R}, |\,|)$ $\quad A = [0, +\infty) \Rightarrow \delta(A) = +\infty \Rightarrow \sup_{(x,y)\in A^2} \rho(x,y) = +\infty \iff$

$(\forall M > 0) \exists (x_1, y_k) \in A : \rho(x_1, y_1) > M$

Θεωρώ $M > 0 \Rightarrow M+1 > 0 \Rightarrow M+1 \in [0, +\infty) : \rho(0, M+1) = |0 - (M+1)| =$
$M+1 > M$

Άρα αυτό το σύνολο ονομάζεται μη φραγμένο γιατί $\delta(A) = +\infty$

* Στο διακριτό μετρικό χώρο η απόσταση είναι 0 ή 1 άρα και τα σύνολα αυτά σε αυτόν τον χώρο είναι φραγμένα

Παρατήρηση

$(\mathbb{R}, \tau)$ με $\tau(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|} \leq 1$ είναι μετρική

η τ είναι μετρική. Άρα η τ (αφού $\tau(x,y) \leq 1$) είναι μία φραγμένη μετρική.